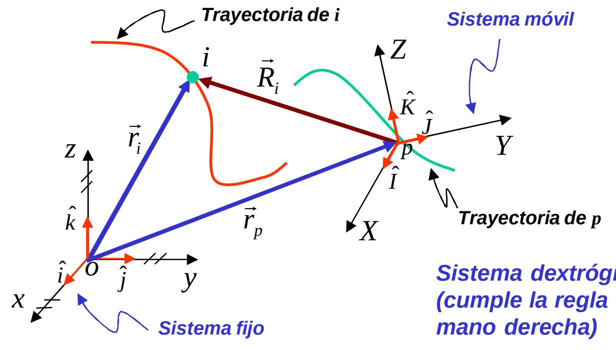
Sistemas de referencia móviles (i)



Posición absoluta de i :

$$\vec r_i = \vec r_p + \vec R_i \qquad \forall t$$

El sistema móvil es un sistema ortogonal, rígido y dextrógiro

Sistema dextrógiro (cumple la regla de la mano derecha) ⇒

$$\hat I \times \hat J = \hat K \qquad \hat J \times \hat K = \hat I \qquad \hat K \times \hat I = \hat J \qquad \forall t$$

Sistema rígido ⇒

$$\hat I \cdot \hat I = 1 \qquad \hat I \cdot \hat J = 1 \qquad \hat J \cdot \hat K = 1 \qquad \forall t$$

⇒

$$\frac{d}{dt}\left(\hat I \cdot \hat I\right) = 2\frac{d\hat I}{dt}\cdot \hat I = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\hat J \cdot \hat J\right) = 2\frac{d\hat J}{dt}\cdot \hat J = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\hat K \cdot \hat K\right) = 2\frac{d\hat K}{dt}\cdot \hat K = 0$$

⇒

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\hat I}{dt}\cdot \hat I = 0 \\ \frac{d\hat J}{dt}\cdot \hat J = 0 \\ \frac{d\hat K}{dt}\cdot \hat K = 0 \end{array}\right\}$$

La derivada de un versor es perpendicular al mismo!

Sistema ortogonal rígido ⇒

$$\hat I \cdot \hat J = 0 \qquad \hat I \cdot \hat K = 0 \qquad \hat J \cdot \hat K = 0 \qquad \forall t$$

⇒

$$\frac{d}{dt}\left(\hat I \cdot \hat J\right) = \frac{d\hat I}{dt}\cdot \hat J + \hat I \cdot \frac{d\hat J}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\hat J \cdot \hat K\right) = \frac{d\hat J}{dt}\cdot \hat K + \hat J \cdot \frac{d\hat K}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\hat K \cdot \hat I\right) = \frac{d\hat K}{dt}\cdot \hat I + \hat K \cdot \frac{d\hat I}{dt} = 0$$

⇒

Funciones escalares!

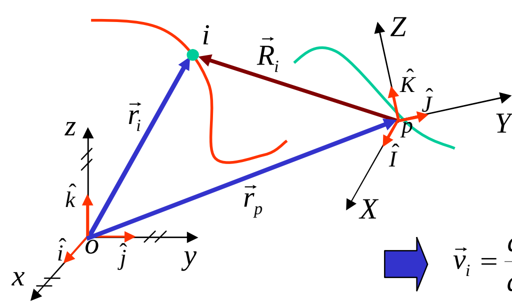
$$\left\{\begin{array}{l} \omega_z = \frac{d\hat I}{dt}\cdot \hat J = -\frac{d\hat J}{dt}\cdot \hat I \\ \omega_x = \frac{d\hat J}{dt}\cdot \hat K = -\frac{d\hat K}{dt}\cdot \hat J \\ \omega_y = \frac{d\hat K}{dt}\cdot \hat I = -\frac{d\hat I}{dt}\cdot \hat K \end{array}\right.$$

Universidad Simón Bolívar

MC-2431 Dinámica I
Euro Casanova, sep-dic 2007

I. Leyes de Newton
II. Cinemática
Sist. de referencia
Una partícula
Sist. de partículas
Cuerpos rígidos
III. Dinámica

Sistemas de referencia móviles (ii)



Posición absoluta de i :

$$\vec r_i = \vec r_p + \vec R_i \qquad \forall t$$

⇒

$$\vec v_i = \frac{d\vec r_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec r_p + \vec R_i\right) = \frac{d\vec r_p}{dt} + \frac{d\vec R_i}{dt} = \vec v_p + \frac{d\vec R_i}{dt}$$

$$\frac{d\vec R}{dt} = ?$$ *Derivada de un vector referido a una base móvil ?*

$$\vec R = X\hat I + Y\hat J + Z\hat K$$ *Vector de posición relativo al sistema móvil*

$$\frac{d\vec R}{dt} = \frac{d}{dt}\left(X\hat I\right) + \frac{d}{dt}\left(Y\hat J\right) + \frac{d}{dt}\left(Z\hat K\right) = \frac{dX}{dt}\hat I + X\frac{d\hat I}{dt} + \frac{dY}{dt}\hat J + Y\frac{d\hat J}{dt} + \frac{dZ}{dt}\hat K + Z\frac{d\hat K}{dt}$$

$$\frac{d\vec R}{dt} = \underbrace{\left(X\frac{d\hat I}{dt} + Y\frac{d\hat J}{dt} + Z\frac{d\hat K}{dt}\right)}_{A} + \underbrace{\frac{dX}{dt}\hat I + \frac{dY}{dt}\hat J + \frac{dZ}{dt}\hat K}_{B}$$

Sistemas de referencia móviles (iii)

$$\underbrace{\left(X\frac{d\hat I}{dt}+Y\frac{d\hat J}{dt}+Z\frac{d\hat K}{dt}\right)}_{A}=\left(X\frac{d\hat I}{dt}\cdot\hat I+Y\frac{d\hat J}{dt}\cdot\hat I+Z\frac{d\hat K}{dt}\cdot\hat I\right)\hat I+\left(X\frac{d\hat I}{dt}\cdot\hat J+Y\frac{d\hat J}{dt}\cdot\hat J+Z\frac{d\hat K}{dt}\cdot\hat J\right)\hat J+$$
$$+\left(X\frac{d\hat I}{dt}\cdot\hat K+Y\frac{d\hat J}{dt}\cdot\hat K+Z\frac{d\hat K}{dt}\cdot\hat K\right)\hat K$$

Recordando :
$$\begin{cases}\dfrac{d\hat I}{dt}\cdot\hat I=\dfrac{d\hat J}{dt}\cdot\hat J=\dfrac{d\hat K}{dt}\cdot\hat K=0\\[2ex] \omega_z=\dfrac{d\hat I}{dt}\cdot\hat J=-\dfrac{d\hat J}{dt}\cdot\hat I\quad;\quad\omega_x=\dfrac{d\hat J}{dt}\cdot\hat K=-\dfrac{d\hat K}{dt}\cdot\hat J\quad;\quad\omega_y=\dfrac{d\hat K}{dt}\cdot\hat I=-\dfrac{d\hat I}{dt}\cdot\hat K\end{cases}$$

$$\left(X\frac{d\hat I}{dt}+Y\frac{d\hat J}{dt}+Z\frac{d\hat K}{dt}\right)=\left(-Y\omega_z+Z\omega_y\right)\hat I+\left(X\omega_z-Z\omega_x\right)\hat J+\left(-X\omega_y+Y\omega_x\right)\hat K=\begin{vmatrix}\hat I&\hat J&\hat K\\ \omega_x&\omega_y&\omega_z\\ X&Y&Z\end{vmatrix}$$

Definiendo : $\vec\omega=\omega_x\hat I+\omega_y\hat J+\omega_z\hat K$ ***Velocidad Angular Absoluta del sistema*** $pXYZ$:

$$\Rightarrow\quad\underbrace{\left(X\frac{d\hat I}{dt}+Y\frac{d\hat J}{dt}+Z\frac{d\hat K}{dt}\right)}_{A}=\vec\omega\times\overline{R}$$

Sistemas de referencia móviles (iv)

$$\underbrace{\frac{dX}{dt}\hat I+\frac{dY}{dt}\hat J+\frac{dZ}{dt}\hat K}_{B}=\dot X\hat I+\dot Y\hat J+\dot Z\hat K=\frac{D\vec R}{Dt}$$

Derivada relativa a $pXYZ$
(como si $pXYZ$ ***no se moviera!)***

$$\Rightarrow\quad\frac{d\vec R}{dt}=\underbrace{\vec\omega\times\vec R}_{A}+\underbrace{\frac{D\vec R}{Dt}}_{B}$$

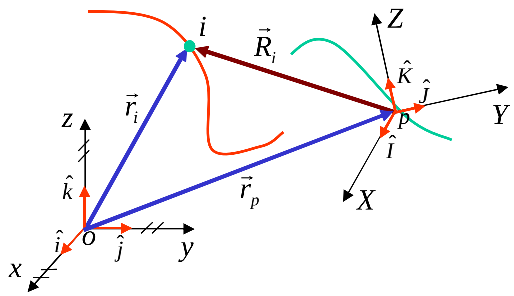
Regla general para derivar un vector referido a una base móvil

Derivadas de los versores de la base móvil (Relaciones de Poisson)

$$\frac{d\hat I}{dt}=\vec\omega\times\hat I$$
$$\frac{d\hat J}{dt}=\vec\omega\times\hat J\qquad\qquad\frac{D\hat I}{Dt}=\frac{D\hat J}{Dt}=\frac{D\hat K}{Dt}=\vec 0$$
$$\frac{d\hat K}{dt}=\vec\omega\times\hat K$$

Siméon Poisson (1781-1840)

Sistemas de referencia móviles (v) : Velocidad



Posición absoluta de i :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_p + \vec{R}_i \qquad \forall t$$

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_p + \vec{R}_i\right) = \frac{d\vec{r}_p}{dt} + \frac{d\vec{R}_i}{dt} = \vec{v}_p + \vec{\omega}\times\vec{R}_i + \frac{D\vec{R}_i}{Dt}$$

Definiendo : $\vec{V}_{Ri} = \dfrac{D\vec{R}_i}{Dt}$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_p + \vec{\omega}\times\vec{R}_i + \vec{V}_{Ri}$$

$\vec{v}_p$ ***Velocidad absoluta del punto*** p

$\vec{\omega}$ ***Velocidad angular absoluta del sistema*** $pXYZ$

$\vec{R}_i$ ***Vector posición de i respecto a*** $pXYZ$

$\vec{V}_{Ri}$ ***Velocidad relativa de i respecto a*** $pXYZ$

I. Leyes de Newton

II. Cinemática
Sist. de referencia
Una partícula
Sist. de partículas
Cuerpos rígidos

III. Dinámica

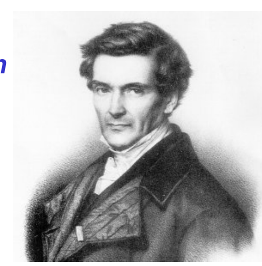
Sistemas de referencia móviles (vi) : Aceleración

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_p + \vec{\omega}\times\vec{R}_i + \vec{V}_{Ri}\right) = \frac{d\vec{v}_p}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{R}_i + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{R}_i}{dt} + \frac{d\vec{V}_{Ri}}{dt}$$

$$= \frac{d\vec{v}_p}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{R}_i + \vec{\omega}\times\left(\left(\vec{\omega}\times\vec{R}_i\right) + \frac{D\vec{R}_i}{Dt}\right) + \vec{\omega}\times\vec{V}_{Ri} + \frac{D\vec{V}_{Ri}}{Dt}$$

Definiendo : $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ $\qquad \vec{A}_{Ri} = \dfrac{D\vec{V}_{Ri}}{Dt}$

$$\vec{a}_i = \vec{a}_p + \vec{\alpha}\times\vec{R}_i + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}_i\right) + \overbrace{2\vec{\omega}\times\vec{V}_{Ri}}^{\text{Aceleración de Coriolis}} + \vec{A}_{Ri}$$



Gustave Coriolis (1792-1843)

$\vec{a}_p$ ***Aceleración absoluta del punto*** p

$\vec{\alpha}_p$ ***Aceleración angular absoluta del sistema*** $pXYZ$

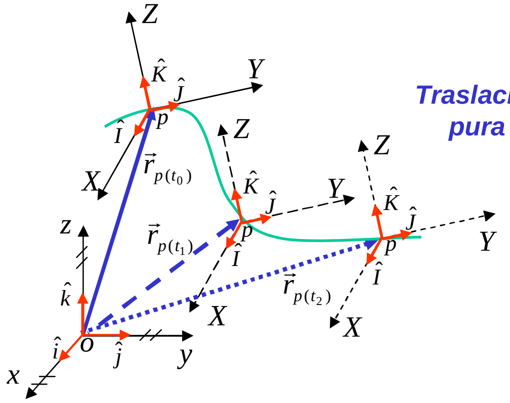
$\vec{R}_i$ ***Vector posición de i respecto a*** $pXYZ$

$\vec{\omega}$ ***Velocidad angular absoluta del sistema*** $pXYZ$

$\vec{V}_{Ri}$ ***Velocidad relativa de i respecto a*** $pXYZ$

$\vec{A}_{Ri}$ ***Aceleración relativa de i respecto a*** $pXYZ$

Sistemas de referencia móviles (vii) : Movimiento



Traslación pura $\Leftrightarrow$ $\forall t$

$$\begin{cases} \vec{v}_p \neq \vec{0} \\ \dfrac{d\hat{I}}{dt} = \dfrac{d\hat{J}}{dt} = \dfrac{d\hat{K}}{dt} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\omega} = \vec{0} \\ \vec{\alpha} = \vec{0} \end{cases}$$

Rotación pura respecto a p $\Leftrightarrow$ $\forall t$

$$\vec{v}_p = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_p = \vec{0}$$

Al menos 2 de : $\dfrac{d\hat{I}}{dt};\dfrac{d\hat{J}}{dt};\dfrac{d\hat{K}}{dt}$

deben ser no nulas

$$\Rightarrow \vec{\omega} \neq \vec{0}$$